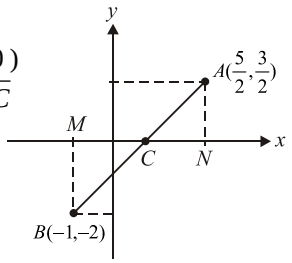
100 學年四技二專第四次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 100-4-C

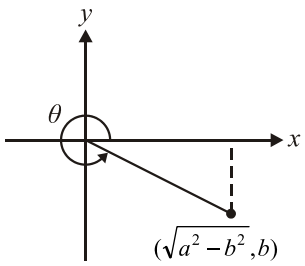
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	B	D	A	C	B	D	C	D	B	A	A	A	B	D	C	C	B	D	A	C	B	A	D	A

1. $C_1^4(4選1)+C_2^4(4選2)+C_3^4(4選3)+C_4^4(4選4)$
   $=2^4-1$，$P=\dfrac{1}{2^4-1}=\dfrac{1}{15}$
2. $\log 2-\log 1=\log 4-\log 2=\log 8-\log 4=\log 16-\log 8$
   $\Rightarrow \log\dfrac{2}{1}=\log\dfrac{4}{2}=\log\dfrac{8}{4}=\log\dfrac{16}{8}=\log 2$
   故(B)爲等差數列
3. $f(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)-4x+5$
   $g(x)=(x-1)Q_2(x)+3$
   $f(x)+g(x)$ 除以 $(x-1)$ 之餘式
   $=f(1)+g(1)=-4+5+3=4$
4. (所有排列)－(「0」爲首的情形)：
   $\dfrac{6!}{3!2!}-\dfrac{5!}{3!2!}=\dfrac{6\times5\times4}{2}-\dfrac{5\times4}{2}=60-10=50$
5. 從黑桃 13 張中取 1 張 C_1^{13}
   從紅心 13 張中取 1 張 C_1^{13}
   從方塊 13 張中取 1 張 C_1^{13}
   從梅花 13 張中取 1 張 C_1^{13}
   $\Rightarrow C_1^{13}\times C_1^{13}\times C_1^{13}\times C_1^{13}$
6. 原式 $\Rightarrow (a^2-3a+2)x=3a-6$
   $(a-1)(a-2)x=3(a-2)$，∵方程式有無限多解
   ∴ $(a-1)(a-2)=0$，且 $3(a-2)=0\Rightarrow a=2$
7. $r=\dfrac{\left|0+\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\pi r^2=\dfrac{27}{4}\pi$
8. 設 L：$4x-3y=k\Rightarrow \dfrac{x}{\frac{k}{4}}+\dfrac{y}{\frac{-k}{3}}=1$
   $\Rightarrow \dfrac{k}{4}-\dfrac{k}{3}=\dfrac{-k}{12}=1\Rightarrow k=-12\Rightarrow L$：$4x-3y+12=0$
9. $\sin 70°+i\cos 250°=\cos 20°-i\sin 20°$
   $=\cos 340°+i\sin 340°$
10. 由柯西不等式可知：$(x^2+y^2)(3^2+4^2)\ge(3x+4y)^2$
    $(x^2+y^2)\times 25\ge 25$，$x^2+y^2\ge 1$
11. 如右圖，
    (∵兩向量方向相反，∴ $\alpha<0$)
    即 $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{BC}$ 可得 $\overrightarrow{AC}=-\alpha\overrightarrow{BC}$
    ΔBCM 與 ΔACN 相似



$\Rightarrow \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AN}}{\overline{BM}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}=-\alpha\Rightarrow\alpha=-\dfrac{3}{4}$

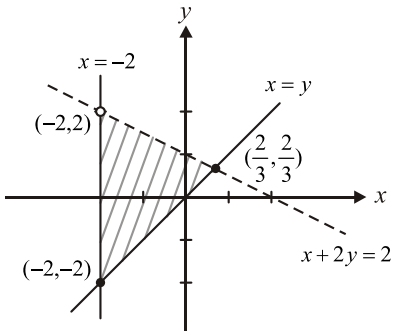
12. 雙曲線與其漸近線不相交
    2 條漸近線爲 $(\dfrac{x}{4})^2-(\dfrac{y}{3})^2=0$，$(\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3})(\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3})=0$
    即 $3x+4y=0$ 或 $3x-4y=0$
    其他與漸近線平行之直線必會與雙曲線相交
13. $2\cos^2\theta-1=3\cos\theta+1$，$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2=0$
    $(2\cos\theta+1)(\cos\theta-2)=0$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，2(2 不合)
    又 $0°\le\theta\le 180°\Rightarrow\theta=120°$，$\tan\theta=-\sqrt{3}$
14. 已知 $\sin\theta=\dfrac{b}{a}$，$a>0$、$b<0$
    $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$
    如右圖 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
    $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$



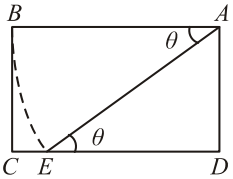
15. 如下圖

x	−2	−1	0
y	−2 , −1 ,0,1	−1 ,0,1	0

共 8 組整數解



16. 如右圖
    $\angle BAE=\angle DEA=\theta$
    $\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=30°=\dfrac{\pi}{6}$
    扇形面積 $=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}\times 2^2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$



17. $m_1=1$，$m_2=2$，$\tan\theta=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\dfrac{2-1}{1+1\times 2}=\dfrac{1}{3}$

$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

18. $\log_{2^{10}}(\log_{\frac{1}{8}}x)=-0.1$ ，$(2^{10})^{-0.1}=\log_{\frac{1}{8}}x$

$\dfrac{1}{2}=\log_{\frac{1}{8}}x$ ，$x=(\dfrac{1}{8})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

19. $f(x)=\dfrac{16}{\sqrt{x}}=16x^{-\frac{1}{2}}$ ，$f'(x)=-8x^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x)=12x^{-\frac{5}{2}}$ ，$f^{(3)}(x)=-30x^{-\frac{7}{2}}$

$f^{(3)}(1)=-30$

20. 依題意：$\vec{a}=(2,2)$ ，$\vec{b}=(1,2)$

$\alpha(2,2)+\beta(1,2)=(3,4)$ ，$\begin{cases}2\alpha+\beta=3\\2\alpha+2\beta=4\end{cases}\Rightarrow\beta=1$ ，$\alpha=1$

$|\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}|=|1\times(2,2)-1\times(1,2)|=|(1,0)|=1$

21. $\begin{cases}2a-b=c\cdots\cdots(1)\\2a+b=2c\cdots\cdots(2)\end{cases}$ ，$(1)+(2)\Rightarrow 4a=3c\Rightarrow a=\dfrac{3}{4}c$

$(2)-(1)\Rightarrow 2b=c\Rightarrow b=\dfrac{1}{2}c$

$a:b:c=\dfrac{3}{4}c:\dfrac{1}{2}c:c=3:2:4$

$\Rightarrow$ 令 $a=3k$ ，$b=2k$ ，$c=4k$ $(k>0)$

最小邊爲 b ，$\cos\theta=\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\dfrac{9k^2+16k^2-4k^2}{2\times3k\times4k}=\dfrac{21}{24}=\dfrac{7}{8}$

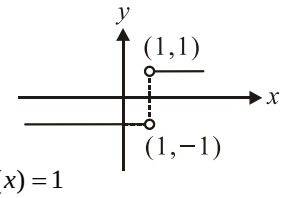
22. $2^5\cdot(2^x)^2-12\cdot2^x+1=0$ ，令 $2^x=A$ ，$A>0$

$32A^2-12A+1=0$ ，$(8A-1)(4A-1)=0$

$A=\dfrac{1}{8}$ ，$\dfrac{1}{4}$ ；$2^x=\dfrac{1}{8}$ ，$\dfrac{1}{4}$ ；$x=-3$ ，-2

$a=(-3)+(-2)=-5$

23. 如右圖



(A) 當 $x<0$ 且 $x\to0$ 時

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$

(B) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1$ 且 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$

故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在

(C) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1$ 且 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-1$

故 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$

(D) $f(1)$ 不存在

24. 令 $u=x+2$ ，$\dfrac{du}{dx}=1$

且 $x=-1$ 時 $u=1$ ，$x=7$ 時 $u=9$

$\int_{-1}^{7}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}dx=\int_{1}^{9}\dfrac{1}{\sqrt{u}}du=\int_{1}^{9}u^{-\frac{1}{2}}du=2u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^9$

$=2(9^{\frac{1}{2}}-1)=4$

25. 由 $\begin{cases}y=-x^2+2x\text{(開口向下)}\\y=x^2-2x-6\text{(開口向上)}\end{cases}$

$\Rightarrow-x^2+2x=x^2-2x-6$

$\Rightarrow2x^2-4x-6=0\Rightarrow2(x+1)(x-3)=0$

$\Rightarrow x=-1,3$

所圍面積 $=\int_{-1}^{3}[(-x^2+2x)-(x^2-2x-6)]dx$

$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)\,dx=(\dfrac{-2}{3}x^3+2x^2+6x)\Big|_{-1}^{3}$

$=(-18+18+18)-(\dfrac{2}{3}+2-6)=\dfrac{64}{3}$