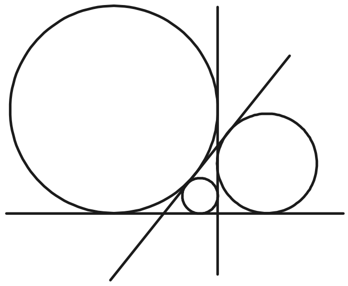
103 學年度四技二專第四次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 103-4-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	B	A	C	D	D	A	D	C	B	A	C	B	D	C	A	A	C	D	A	B	D	C	B	A

1. θ為直線L：$x+y+3=0$的斜角
   而L的斜率為$-1 \Rightarrow \tan\theta=-1$
   $\dfrac{3\sin\theta+4\cos\theta}{3\sin\theta-4\cos\theta}=\dfrac{3\tan\theta+4}{3\tan\theta-4}=\dfrac{-3+4}{-3-4}=-\dfrac{1}{7}$
2. $\overleftrightarrow{BC}$方程式為$y-0=\dfrac{-3-0}{5-1}(x-1)\Rightarrow 3x+4y-3=0$
   $\overline{BC}$邊上的高之長即為A到$\overline{BC}$的距離等於
   $\left|\dfrac{-3-4-3}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=2$
3. 設$\angle ACB=x$，θ為$\angle ACB$的外角，$\therefore \theta=\pi-x$
   $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-2\sin x\cos x$
   $=-2\times\dfrac{3}{\sqrt{34}}\times\dfrac{5}{\sqrt{34}}=-\dfrac{30}{34}=-\dfrac{15}{17}$
4. $\because \Delta PF_1F_2$為正三角形，已知$\overline{F_1F_2}=2$
   $\therefore \overline{PF_1}=\overline{PF_2}=2$
   P為橢圓上的點，$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a \Rightarrow 2a=4$，$\therefore a=2$
   而此橢圓的長軸平行於x軸，$\therefore m=a^2=4$
   而已知$c=1$，$\therefore n=b^2=a^2-c^2=3\Rightarrow m+2n=10$
5. (A) 週期應為π
   (B) 最大值應為$\sqrt{3^2+4^2}=5$
   (C) $\angle A$：$\angle B$：$\angle C=1$：2：3
   $\Rightarrow \angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$
   $\therefore \sin A$：$\sin B$：$\sin C=1$：$\sqrt{3}$：2
   (D) $20°$為銳角，且$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$
   $\therefore \sec 20°>\tan 20°>\sin 20°$
6. $\vec{a}\,//\,\vec{b}\Rightarrow \dfrac{6}{-3}=\dfrac{-8}{y}\Rightarrow y=4$，$\vec{a}\perp\vec{c}\Rightarrow 6x-24=0$
   $\therefore x=4\Rightarrow x+y=8$
7. $\sqrt{8\times\sqrt{32}}\times\sqrt[6]{4}=2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{5}{4}}\times2^{\frac{2}{6}}=2^{\frac{18+15+4}{12}}=2^{\frac{37}{12}}$
8. $\log_4 4<a=\log_4 5<\log_4 16\Rightarrow 1<a<2$
   $\log_6 1<b=\log_{36}25=\log_6 5<\log_6 6\Rightarrow 0<b<1$
   $c=\log_{\frac{1}{8}}125=\log_{2^{-3}}5^3=-\log_2 5\Rightarrow -3<c<-2$
   $\therefore a>b>c$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{5^n}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}+\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$
10. $f(-1)=(-1)^{2013}-(-1)^{102}+1=-1-1+1=-1$
11. $\begin{vmatrix} x^2+1 & 1 & 2 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ x & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$
    $\times(-1)$ $\times(-2)$
    $\Rightarrow -2x^2-1+3x^2+x=0\Rightarrow x^2+x-1=0$
    a、b為此方程式的二根，$\therefore a\cdot b=-1$
12. $6x^2-x-15<0\Rightarrow(2x+3)(3x-5)<0\Rightarrow -\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{3}$
13. x^2y^5項為$C_1^6(2x^2)^1(-y)^5=6\times(2x^2)(-y^5)=-12x^2y^5$
    $\therefore$係數為-12
14. 依分層抽樣抽出的 5 人為 3 男 2 女
    $\therefore$該學生被抽中的機率為
    $\dfrac{C_2^{29}\cdot C_2^{20}}{C_3^{30}\cdot C_2^{20}}=\dfrac{\frac{29\times28}{2!}}{\frac{30\times29\times28}{3!}}=\dfrac{1}{10}$
15. 設原數據的資料為x_i，新數據的資料為y_i
    則$y_i=100x_i-140$，$i=1,2,3,\cdots\cdots,9$
    新數據的算術平均數為
    $\dfrac{1}{9}(3+6+1+5+4+8+6+7+5)=5$
    $\therefore$原數據的算術平均數為$\dfrac{5+140}{100}=1.45$
    新數據的標準差為
    $\sqrt{\frac{1}{9}[(3-5)^2+(6-5)^2+(1-5)^2+(5-5)^2+(4-5)^2+(8-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(5-5)^2]}$
    $=\sqrt{\dfrac{36}{9}}=2$
    $\therefore$舊數據的標準差為$\dfrac{2}{100}=0.02$
16. 設$\overline{BC}=x$，由ΔABC的面積等於ΔABD的面積與ΔBDC的面積和
    $\Rightarrow \dfrac{1}{2}\cdot6\cdot x\cdot\sin60°=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot2\sqrt{3}\cdot\sin30°+\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot x\cdot\sin30°$
    $\Rightarrow 3\sqrt{3}x=6\sqrt{3}+\sqrt{3}x\Rightarrow 2\sqrt{3}x=6\sqrt{3}\Rightarrow x=3$
    $\therefore \Delta ABC$的面積為$\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot3\cdot\sin60°=\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$
17. (A) 四點與原點均距離 1 單位，$\therefore$恰可決定一個圓，圓心為$(0,0)$
    (B) 此三點共線，不能圍成一圓
    (C) 無法作出圓心在$(2,-1)$而與x軸、y軸均相切的圓
    (D) 滿足此條件的圓不只一個，如下圖是其中三種情

形，另有一種情形的圓心在第三象限



18. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$的漸近線爲$2x\pm 5y=0$，故(A)(D)選項與此雙曲線不相交。而$3x-5y=0$通過原點且斜率$\frac{3}{5}$大於$\frac{2}{5}$，所以(B)選項與雙曲線不相交。化$2x+5y+1=0$爲$2x+5(y+\frac{1}{5})=0$，得其圖形係將漸近線$2x+5y=0$的圖形向下平移$\frac{1}{5}$單位位置，故必與雙曲線相交

19. $\because f'(x)=6x$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=12$

20. $\frac{3x+4}{x^2+x-6}=\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x+3}$

將分式方程式等號兩邊分式化爲相同分母，並設分母不爲 0，則等號兩邊分式分子相等，即

$3x+4=x(x+3)+x-2$

$\Rightarrow 3x+4=x^2+3x+x-2\Rightarrow x^2+x-6=0$

$\Rightarrow (x+3)(x-2)=0\Rightarrow x=-3$ 或 2 但均使分母爲 0，與假設不符，所以此題無解

21. 設有 n 隊參加比賽，$\therefore C_2^n=36\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=36$

$\Rightarrow n^2-n-72=0\Rightarrow (n+8)(n-9)=0$

$\Rightarrow n=-8$ 或 $n=9$，但 $n=-8$ 不合，$\therefore n=9$

22. 全部共有$1+2+3+\cdots\cdots+16=136$ 個球

球號	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$	15	16
機率	$\frac{1}{136}$	$\frac{2}{136}$	$\frac{3}{136}$		$\frac{n}{136}$		$\frac{15}{136}$	$\frac{16}{136}$
獎金	99	98	97		$100-n$		85	84

$\therefore$期望值爲$\sum_{n=1}^{16}\frac{n}{136}(100-n)=\frac{1}{136}\sum_{n=1}^{16}(100n-n^2)$

$=\frac{1}{136}[100\sum_{n=1}^{16}n-\sum_{n=1}^{16}n^2]$

$=\frac{1}{136}[100\times\frac{16\times 17}{2}-\frac{16\times 17\times 33}{6}]$

$=\frac{1}{136}\times 16\times 17\times[\frac{100}{2}-\frac{33}{6}]=100-11=89$ 元

23. $\int_0^3(x-2)dx=(\frac{1}{2}x^2-2x)\Big|_0^3=\frac{9}{2}-6=\frac{-3}{2}$

24. $(1-3i)(1+i)=1-3i+i-3i^2=1-2i+3=4-2i=a+bi$

$\therefore a=4$ 、 $b=-2$ 、 $a+b=2$

25. $f'(x)=\frac{2(3x-1)(3)(x^2-1)-(3x-1)^2(2x)}{(x^2-1)^2}$

$\therefore f'(0)=\frac{2\times(-1)\times 3\times(-1)-0}{(0-1)^2}=6$